Devoir maison n$^{\text{o}}$ 3

À rendre le lundi 30 septembre

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1.
À l'aide des formules d'Euler, linéariser l'expression $\cos(x)\sin^2(x)$.

Si besoin, revoir la méthode en vidéo :

Exercice 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad w_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \leqslant w_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2}{(n+1)\pi} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du changement de variable $x = t + n\pi$, montrer que $u_n = (-1)^n w_n$.
5. À l'aide du critère spécial des séries alternées, démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
6. Montrer que la série $\sum |u_n|$ est divergente.
7. Qu'a-t-on mis en évidence ?

Exercice 3. [Facultatif]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.